目次

第 1 章

コンビネータ論理の基礎

この章では、コンビネータ論理の項と実行のための意味の定義を示し、それらを Coq で記述し直します。使うモジュールは以下の通りです。

```
Require Import
  Coq.Arith.Arith Coq.Relations.Relations Coq.Relations.Relation_Operators
  ssreflect.
```

λ 1.1　項

まず、コンビネータ論理の項を定義します。原子的なコンビネータを $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{I}$ だけとすると、以下の規則によって帰納的に定義できます。

1. 変数は項である。
2. X, Y がそれぞれ項であれば、(XY) は項である。
3. $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{I}$ は項である。

また、2 番目の規則は項を表記する上では左結合とします。例えば、$(((UV)W)X)$ は $UVWX$ と略記できます。この定義を Coq では

```
Inductive clterm : Set :=
  | clvar of nat
  | clapp of clterm & clterm
  | clatoms
  | clatomk
  | clatomi.
```

と書きます。`clvar`, `clapp` はそれぞれ 1 番目と 2 番目の規則に対応し、残りの `clatoms`, `clatomk`, `clatomi` は 3 番目の規則に対応します。変数の集合は可算無限集合であれば良いので、自然数の集合 `nat` を使っています。

λ 1.3　弱簡約

ここまでの内容で、コンビネータ論理の実行の意味を与えるための準備をしてきました。コンビネータ論理の実行の意味は、**弱簡約 (weak reduction)** 関係という二項関係によって与えられます。弱簡約の 1 ステップ分を表す関係 $\rhd_{1w}$ は以下の規則によって帰納的に定義できます。

1. $X \rhd_{1w} Y$ であれば $XZ \rhd_{1w} YZ$
2. $X \rhd_{1w} Y$ であれば $ZX \rhd_{1w} ZY$
3. $\mathbf{S}XYZ \rhd_{1w} XZ(YZ)$
4. $\mathbf{K}XY \rhd_{1w} X$
5. $\mathbf{I}X \rhd_{1w} X$

Coq では、これを

```
Inductive cl_weakred : relation clterm :=
  | weakred_left  : forall (t1 t2 t3 : clterm),
    cl_weakred t1 t2 -> cl_weakred (t1 @ t3) (t2 @ t3)
  | weakred_right : forall (t1 t2 t3 : clterm),
    cl_weakred t1 t2 -> cl_weakred (t3 @ t1) (t3 @ t2)
  | weakred_s     : forall (t1 t2 t3 : clterm),
    cl_weakred (clatoms @ t1 @ t2 @ t3) (t1 @ t3 @ (t2 @ t3))
  | weakred_k     : forall (t1 t2 : clterm), cl_weakred (clatomk @ t1 @ t2) t1
  | weakred_i     : forall (t : clterm), cl_weakred (clatomi @ t) t.
```

と書けます。

弱簡約関係は、上で定義した関係の反射推移閉包です。弱簡約関係と `cl_weakred` のための表記法を導入します。

```
Infix "->1w" := cl_weakred (at level 70, no associativity).
Infix "->w" := (cl_weakred * ) (at level 70, no associativity).
```

次に、$\forall X\,Y\,Z.X \rhd_w Y \to XZ \rhd_w YZ$ と $\forall X\,Y\,Z.X \rhd_w Y \to ZX \rhd_w ZY$ を証明します。これらの命題は、$X \rhd_w Y$ を構成する要素に対して `weakred_left` と `weakred_right` をマップすることで証明できます。